ABACOM

BOLETÍN MATEMÁTICO

Año 1, Número 1 **Agosto 2001**

Editorial

Iniciamos hoy una aventura, a la que deseamos invitar a participar a estudiantes y profesores de establecimientos educacionales de las regiones X y XI, con quienes hemos estado en contacto desde 1989 a través de las Olimpíadas Nacionales de Matemática.

Generalmente, los estudiantes creen que la matemática es difícil de entender, aburrida y desconectada de la vida diaria. A través de estas líneas, pretendemos mostrar que lo anterior está alejado de la realidad. En particular, la matemática la encontramos diariamente en las cosas construidas por el hombre (edificios, medios de transporte, etc.), en la naturaleza (crecimiento de un árbol, desarrollo de una población de animales, etc.) y además tiene un carácter formativo pues nos ayuda a razonar y hacer deducciones lógicas.

En estas hojas veremos como se ha ido desarrollando la matemática, quienes han sido los principales forjadores de las ideas fundamentales de esta ciencia, algunas aplicaciones, problemas interesantes, curiosidades y pasatiempos.

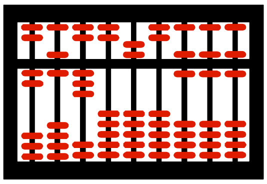
La información que entregaremos a través de estos boletines, será nuestra adaptación de material proveniente de textos de matemática y afines, enciclopedias e Internet.

Entre los objetivos de esta iniciativa están:

- Aportar material que sirva de motivación y complemento a las clases de matemática.
- Incentivar a los estudiantes a interesarse en la matemática a través de su desarrollo histórico y su aplicación a la vida cotidiana.
- Mantener contacto permanente con los docentes y alumnos a través de comentarios acerca de los temas tratados, sugerencias de temas a desarrollar o enviando soluciones a problemas planteados.

Esta publicación tendrá una periodicidad mensual a partir del mes de Agosto, la cual se hará llegar a cada colegio en un número reducido de copias por lo que esperamos que sea difundida a través de diversos medios (murales, fotocopias, multicopiado, etc.).■

DEL ÁBACO AL COMPUTADOR



Uno de los primeros dispositivos mecánicos para contar y efectuar operaciones fue el **ábaco**, utilizado por los chinos ya en el 2000 A.C. y también por las antiguas civilizaciones griega y romana. Ábaco viene del griego *abakos* que significa superficie plana con bolas, pues este aparato consta de bolitas ensartadas en varillas, las que van montadas en un marco rectangular. Al desplazar las bolitas sobre la varilla, sus posiciones representan valores almacenados.

La primera referencia, de manera casual, a este aparato aparece en una obra de Dao Nan Tsang, durante el reinado de la dinastía Yuan en China en el siglo XIV. Con este aparato los astrónomos de esa época podían establecer las estaciones y los días del año, también lo utilizaban los recaudadores de estado y aún el comerciante común para efectuar transacciones en sus negocios. Durante la Edad Media se extendió a toda Europa.

Entre los precursores del **computador** actual está una máquina inventada por el francés Blaise Pascal en 1642, la *Pascalina* y la *Calculadora Universal* del alemán Gottfried Leibniz en 1694, pero el primer computador fue la *Máquina Analítica* ideada por el inglés Charles Babbage en 1835. En 1944, Howard Aitken construyó en la Universidad de Harvard la *Mark I*, el primer computador electrónico. Posteriormente se construyeron otros más avanzados como la Eniac (1947) **(*)**, la Univac (1951) y las primeras IBM (1953). El primer microprocesador surgió en 1971 con lo que el uso del computador se hizo más accesible y masivo.

La unión de estas dos palabras: ábaco y computador, da origen al nombre de este boletín, que pretende abordar desde aquellos tópicos matemáticos que dieron origen a esta ciencia hasta la matemática de nuestros días.■

(*)Esta máquina tenía más de 18.000 tubos de vacío y ocupaba todo el sótano de la Universidad de Pennsylvania.

OLIMPIADA DE MAYO

FEDERACION IBERO AMERICANA DE COMPETICIONES MATEMATICAS

Anualmente, durante el mes de mayo, la Federación Iberoamericana de Competiciones Matemáticas organiza una competencia denominada *Olimpíada de Mayo*. En este evento participan alumnos de hasta quince años, separados en dos niveles de acuerdo a la edad. Este año se efectuó la versión séptima de la olimpíada el día 12 de mayo. Como ejemplo, uno de los problemas que se ha planteado es el siguiente: *En un tablero cuadrado con 9 casillas (de tres por tres), se deben colocar nueve dígitos distintos de modo que se cumplan las siguientes condiciones: Las sumas de los números de la segunda y tercera filas (y también columnas) sean, respectivamente, el doble y el triple de la suma de los números de la primera fila (y también columna).*■

Euclides (s. III A.C.)

Euclides vivió en la ciudad de Alejandría, probablemente en la primera mitad del siglo III A.C. De las informaciones que se tiene no puede precisarse con exactitud el lugar ni la fecha de su nacimiento. Discípulo del filósofo Platón, Euclides fundó una escuela en Alejandría durante el reinado de Ptolomeo I. En esta escuela enseñó la filosofía aprendida con Platón y sus conclusiones sobre matemática geométrica que él estaba comenzando a ordenar dentro de un lenguaje más preciso y operacional. Cuenta la leyenda que cierta mañana el rey Ptolomeo I se aproximó a Euclides y le preguntó si no había un camino más corto para que él, el rey, pudiese aprender la elegante geometría enseñada por Euclides. Este le respondió: "Lamentablemente no existe un camino real para el aprendizaje de la geometría"

Los Cálculos (una colección de teoremas geométricos), *Los Fenómenos* (una descripción del firmamento), *La Óptica*, *La División del Canon* (un estudio matemático de la música) y otros libros se han atribuido durante mucho tiempo a Euclides. Su obra principal, *Los Elementos*, es un extenso tratado de matemáticas en 13 volúmenes sobre materias tales como geometría plana, proporciones en general, propiedades de los números, magnitudes inconmensurables y geometría del espacio. Sin embargo, la mayoría de los historiadores cree que alguna o todas estas obras (aparte de *Los Elementos*) se le han adjudicado erróneamente. Los historiadores también cuestionan la originalidad de algunas de sus aportaciones. Probablemente las secciones geométricas de *Los Elementos* fueron en un principio una revisión de las obras de matemáticos anteriores, pero se considera que Euclides hizo diversos descubrimientos en la teoría de números.

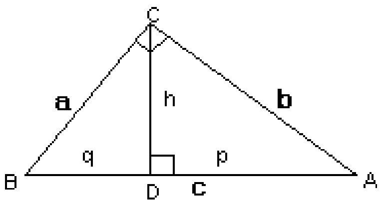
Los Elementos de Euclides se utilizaron como texto durante 2.000 años, e incluso hoy, una versión modificada de sus primeros libros constituye la base de la enseñanza de la geometría plana en las escuelas secundarias.
Nadie sabe, hoy día, cuanta de la geometría en Los Elementos fue desarrollada originariamente por Euclides. Una parte puede haberse basado en libros anteriores, y se supone que algunas de las ideas más importantes de la obra se deben a Eudoxio, quien vivió más o menos en la misma época. En todo caso, de los libros que han llegado hasta nosotros, Los Elementos es el primero que presenta la geometría de una manera organizada y lógica, comenzando con algunas suposiciones simples y desarrollando los teoremas mediante el razonamiento deductivo.
La primera edición impresa de las obras de Euclides que apareció en Venecia en 1482, fue una traducción del árabe al latín. Este trabajo sólo sería criticado en el siglo XIX, cuando Riemann y Lobachevsky abandonaron su famoso 5º postulado, para crear una nueva geometría: la "Geometría No-Euclidiana", que sirvió de base para el trabajo de Albert Einstein en su famosa y revolucionaria Teoría General de la Relatividad. ■

Geometría No-Euclidiana.

- Es la rama de la Geometría en la que el quinto postulado de la Geometría Euclidiana es reemplazado por uno de dos postulados alternativos.
- El quinto postulado de Euclides establece que una y sólo una recta paralela a una recta dada puede ser trazada a través de un punto exterior a la recta.
- La primera alternativa, que permite dos rectas paralelas a través de cualquier punto externo, conduce a la geometría hiperbólica desarrollada independientemente por Nikolai Lobachevsky (1826) y János Bolyai (1832).
- La segunda alternativa, que no permite paralelas a través de cualquier punto externo, conduce a la geometría elíptica, desarrollada por Bernhard Riemann (1854).
- Los resultados de estos dos tipos de geometría No-Euclidiana son idénticos a los de la geometría euclidiana, excepto para las propiedades que consideran rectas paralelas, ya sea en forma explícita o implícita. ■

El Teorema de Euclides

El siguiente teorema, atribuido a Euclides, es muy útil para determinar relaciones entre catetos, hipotenusa, altura y segmentos determinados por la altura en la hipotenusa de un triángulo rectángulo.
El enunciado es: "En todo triángulo rectángulo la altura correspondiente a la hipotenusa es media proporcional geométrica entre los segmentos determinados por la altura en la hipotenusa. Además cada cateto es media proporcional geométrica entre la hipotenusa y el segmento de ésta adyacente al cateto ". Gráficamente tenemos:



$h^2 = pq$; $a^2 = cq$; $b^2 = cp$

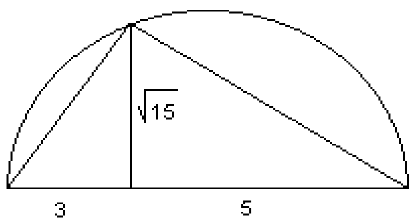
La demostración de este teorema está basada en semejanza de triángulos. Como los triángulos ABC, CBD y ADC son semejantes, se tiene las proporciones:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{CD}{DA}, \quad \frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC}, \quad \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$$

o sea : $\dfrac{q}{h} = \dfrac{h}{p}, \quad \dfrac{a}{c} = \dfrac{q}{a}, \quad \dfrac{b}{c} = \dfrac{p}{b}$

de donde: $h^2 = pq$, $a^2 = cq$, $b^2 = cp$

Una aplicación del Teorema de Euclides es la representación de segmentos cuya longitud es un número irracional correspondiente a una raíz cuadrada no exacta (es decir su resultado no es un número entero ni racional), para ello ejemplificaremos con $\sqrt{15}$.
Descomponemos 15 en dos factores, por ejemplo $15 = 3 \times 5$, y luego graficamos un segmento de longitud $3 + 5 = 8$ unidades.



Con este segmento como diámetro dibujamos una semicircunferencia y levantamos una perpendicular h al diámetro en el punto de división. Formamos un triángulo, que es rectángulo, pues todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto. Así se obtiene: $h^2 = 3 \times 5$ o sea $h = \sqrt{15}$.■

Los Elementos

La obra comprende trece tomos que abordan los temas siguientes:

- **Tomo 1**: Punto, recta y plano. Triángulos y Teorema de Pitágoras.
- **Tomo 2**: Areas de cuadrados y rectángulos.
- **Tomos 3 y 4**: Círculos y polígonos.
- **Tomos 5 y 6**: Areas de figuras geométricas, proporciones.
- **Tomos 7 al 9**: Teoría de Números.
- **Tomos 10 al 13**: Geometría del espacio.

Se parte con cinco **axiomas** que introducen las relaciones entre igualdad o desigualdad de magnitudes y cinco **postulados** que garantizan la posibilidad de realizar las construcciones geométricas.
En el texto se dan 119 **definiciones** de tipo descriptivas y 465 **proposiciones** demostradas por el método sintético.
En las construcciones geométricas sólo se admiten la regla y el compás.
Durante muchos siglos los matemáticos pensaron que el quinto postulado se podía demostrar utilizando los otros cuatro, pero los esfuerzos para probarlo fueron inútiles hasta que en el siglo XIX se demostró la posibilidad de construir un sistema geométrico coherente negando el quinto postulado, lo que dio origen a las **Geometrías No-Euclidianas.**
Los Axiomas y los Postulados son los siguientes:

Axiomas:

1. Los iguales a un tercero son iguales entre sí.
2. Si se suman los iguales con iguales, las sumas son iguales.
3. Si se restan los iguales, los restos son iguales.
4. Las cosas que coinciden mutuamente son mutuamente iguales.
5. El todo es siempre mayor que la parte.

Postulados:

1. Por dos puntos cualesquiera pasa una línea recta.
2. Un segmento de recta puede prolongarse indefinidamente.
3. Desde cualquier centro y con cualquier radio puede trazarse una circunferencia.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Por un punto exterior a una recta pasa sólo una recta paralela a ella. ■

P R O B L E M A

- Demuestre el teorema de Pitágoras usando el teorema de Euclides.
- Si m, n son números naturales, $m > n$, compruebe que $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ y $c = m^2 + n^2$ satisfacen el teorema de Pitágoras.
- Construya una tabla con todos los valores posibles para m, n, a, b y c con $c \leq 25$.■

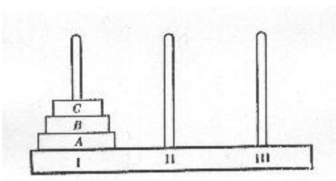
El poderoso enanillo 2

La aritmética encierra muchos casos casi increíbles. El número 2 y la operación de elevación a potencia provoca muchas sorpresas que parecen paradojas. Veamos dos casos.

Doblando una hoja

Suponga que tenemos una hoja suficientemente grande, de $0{,}1$ mm. de espesor. Se corta por la mitad y se colocan los dos trozos uno encima del otro. Cortamos nuevamente por la mitad y colocamos los cuatro trozos uno encima del otro, volvemos a cortar por la mitad y colocamos los trozos en un montón y así sucesivamente hasta 50 veces. ¿Cuál será la altura del montón resultante?
La respuesta correcta es que la altura del montón ¡supera los 100 millones de kilómetros! En efecto, al hacer los 50 cortes del modo indicado se obtienen 2^{50} hojas, o sea $2^{10}\times 2^{10}\times 2^{10}\times 2^{10}\times 2^{10}$, pero 2^{10} es un poco mayor que 1000 (en realidad vale 1024). Así que $2^{50}\approx 1000^{5}=10^{15}$. Como la hoja tiene espesor de 0,1 mm. entonces la altura es de 10^{14} mm. o sea 10^{11} metros es decir 10^{8} = 100.000.000 Km. (Esta es aproximadamente la distancia de la tierra al sol).

La Torre de Hanoi



Existe un rompecabezas cuyo origen está en la más remota antigüedad, es la llamada Torre de Hanoi. Consiste en un tablero horizontal donde se ubican tres clavos verticales, como se indica en la figura.
El problema consiste en pasar todos los discos a uno de los otros clavos, el tercero por ejemplo, de tal manera que la disposición final sea la misma que la primitiva. Pero sólo se puede mover un disco a la vez y ninguno de ellos puede quedar encima de otro que sea más pequeño que él. El segundo clavo se usa como auxiliar para ir transportando los discos al tercero.
Se puede probar que si *n* es el número de discos, entonces el número mínimo de movimientos es $2^{n}-1$. Por ejemplo para 3 discos se necesita $2^{3}-1=7$ movimientos (C a III, B a II, C a II, A a III, C a I, B a III y C a III). La leyenda cuenta que "...en la creación Dios colocó 64 discos de oro puro en una bandeja de bronce con agujas de diamante, en la disposición antes indicada. Esta es la Torre de Brama en el Templo de Benares. Hay sacerdotes que incesantemente cambian los discos de una a otra aguja según la ley ordenada por Brama. Cuando los 64 discos hayan sido transferidos a otra de las agujas, la torre, el templo y el mundo entero dejarán de existir".
Si los sacerdotes trabajaran las 24 horas del día, moviendo los discos a razón de uno cada segundo, sin cometer ningún error, tardarían $5{,}82\times 10^{11}$ años, es decir casi 6 millones de siglos en terminar la tarea. ¡Esta es una de las profecías más optimistas sobre el fin del mundo! ■

Visítenos en www.uach.cl/destac/abacom.htm

Pasatiempos matemáticos

Adivinación de pensamiento

Se le pide a una persona (mayor de 10 años), que multiplique su edad por 2, sume 5 al resultado, multiplique por 50, sume el número correspondiente al día de su nacimiento, reste el número de días que tiene un año y diga el resultado. A este resultado el "adivino" le suma 115, obteniendo un número de 4 cifras. En éste, las 2 primeras cifras corresponden a la edad y las 2 últimas corresponden al número del día de nacimiento.
Por ejemplo, si la persona tiene 35 años y nació un día 14 entonces hará los siguientes cálculos:

$$35\times 2=70,\ 70+5=75,\ 75\times 50=3750,$$
$$3750+14=3764,\ 3764-365=3399$$

A este resultado se le suma 115 obteniendo 3514, es decir 35 y 14.

Explicación

Si representamos por e la edad y d el día de nacimiento entonces haciendo las operaciones indicadas resulta:

$2e,\ 2e+5,\ 100e+250,\ 100e+n+250,\ 100e+n-115$ y si a este resultado se le suma 115, se obtiene $100e+n$.

∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞

Los cuatro cuatros

Escriba cada uno de los números desde el cero hasta el diez, usando cuatro veces el número cuatro, y las cuatro operaciones básicas.

Respuesta

$44-44=0$; $\dfrac{44}{44}=1$; $\dfrac{4}{4}+\dfrac{4}{4}=2$; $\dfrac{4+4+4}{4}=3$

$4-\dfrac{4-4}{4}=4$; $\dfrac{4\cdot 4+4}{4}=5$; $\dfrac{4+4}{4}+4=6$; $\dfrac{44}{4}-4=7$

$4+4+4-4=8$; $4+4+\dfrac{4}{4}=9$; $\dfrac{44-4}{4}=10$

∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞

Niño complejo

¿Qué es un niño complejo?.... Es aquel niño que tiene madre real y padre imaginario. ■

ABACOM
BOLETÍN MATEMÁTICO

Año 1, Número 1 **Agosto 2001**

Publicación mensual destinada a estudiantes y profesores de Enseñanza Media.
Proyecto auspiciado por la Dirección de Extensión de la Universidad Austral de Chile.

Director: Juan Leiva V.
Director Alterno: Víctor Alvarado A.
Editor: Miguel A. Velásquez R.

I. de Matemática - C. Miraflores - Fac. de Ciencias - UACH.
Email: abacom@uach.cl Fono Fax: 221828