ABACOM
BOLETÍN MATEMÁTICO
Año 1, Número 4 Noviembre 2001

Editorial

Con ésta, la cuarta edición, concluimos una etapa. El primer año de ABACOM Boletín Matemático. Nuestra idea es continuar por muchos años con este proyecto, que creemos ha contribuido para acercar un poco la matemática a los estudiantes y mostrarles un aspecto diferente de esta hermosa ciencia.

Entre la correspondencia que hemos recibido se destacan algunos comentarios como...”los contenidos que nos presenta, dan una nueva modalidad de hacer llegar la matemática a los niños y jóvenes”,...”contribuye a que los estudiantes aprecien de forma más amena la matemática”.

En los dos números anteriores se trataron las ecuaciones de segundo y tercer grado. En este número continuamos con la de cuarto grado y superiores. En la sección Pasatiempos matemáticos nos cooperó en esta oportunidad el profesor Walter Sáez C. También, permanentemente nos han colaborado los profesores Manuel Bustos V. y Ole Rask .

Esperamos encontrarnos nuevamente con Uds. cada mes el próximo año■

Profesores y alumnos en el lanzamiento de ABACOM (23/08/2001)

LA ECUACIÓN DE CUARTO GRADO

La solución de la ecuación de cuarto grado la obtuvo por primera vez Ludovico Ferrari (1522-1565), discípulo de Cardano, y es la que se da continuación.

La ecuación general de cuarto grado $x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, se puede escribir $x^4+bx^3=-cx^2-dx-e$, esto es, $\left(x^2+\frac{1}{2}bx\right)^2=\left(\frac{1}{4}b^2-c\right)x^2-dx-e$.

Agregando $\left(x^2+\frac{1}{2}bx\right)y+\frac{1}{4}y^2$ se obtiene

$$\left(x^2+\tfrac{1}{2}bx+\tfrac{1}{2}y\right)^2=\left(\tfrac{1}{4}b^2-c+y\right)x^2+\left(\tfrac{1}{2}by-d\right)x+\tfrac{1}{4}y^2-e \quad (*)$$

El segundo miembro es un cuadrado perfecto de una función lineal de x si y sólo si su discriminante es cero: $\left(\frac{1}{2}by-d\right)^2-4\left(\frac{1}{4}b^2-c+y\right)\left(\frac{1}{4}y^2-e\right)=0$, ecuación que se puede escribir: $y^3-cy^2+(bd-4e)y-b^2e+4ce-d^2=0$.

Escogemos cualquier raíz y de esta ecuación cúbica. Entonces el lado derecho de la ecuación $(*)$ es el cuadrado de una función lineal, digamos: $mx+n$. Así, $x^2+\frac{1}{2}bx+\frac{1}{2}y=mx+n$ o $x^2+\frac{1}{2}bx+\frac{1}{2}y=-mx-n$.

Las raíces de estas dos ecuaciones cuadráticas son las cuatro raíces de $(*)$, y por tanto, de la ecuación equivalente dada.

Ejemplo: Sea la ecuación $x^4-3x^2+6x-2=0$.

Aquí: $b=0,\ c=-3,\ d=6,\ e=-2$. La ecuación cúbica en y queda: $y^3+3y^2+8y-12=0$. Es evidente que esta ecuación tiene la raíz 1. Para $y=1$, la ecuación $(*)$ queda $\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2=4x^2-6x+\frac{9}{4}=\left(2x-\frac{3}{2}\right)^2$. Así: $x^2+\frac{1}{2}=\pm\left(2x-\frac{3}{2}\right); x^2-2x+2=0$ o $x^2+2x-1=0$. Las raíces $1\pm i, -1\pm\sqrt{2}$ de estas dos ecuaciones cuadráticas son las soluciones de la ecuación dada.

Ecuaciones de quinto grado y superior:

EVARISTE GALOIS

Evariste Galois(1811-1832) trabajó durante mucho tiempo en la obtención de una fórmula general válida para ecuaciones de grado 5 y superiores. Finalmente demostró, casi simultaneamente con Niels Henrik Abel (1802-1829), la imposibilidad de encontrar la solución general a estas ecuaciones, utilizando únicamente suma, resta, multiplicación, división, exponenciación y radicación de los coeficientes. Sólo para algunos casos particulares ésta resolución es posible.

NIELS HENRIK ABEL

TALLER ALFA. Matemática seria y de manera entretenida.

Taller Alfa, una actividad del Instituto de Matemáticas de la U.A.Ch. para alumnos talentosos de Enseñanza Media, inició sus actividades el 26 de Septiembre con el tema: *Algunos problemas en teoría de grafos*. Posteriormente se han tratado los temas: *Ecuaciones en diferencias y modelamiento matemático, Un modelo de resolución de problemas.* En este taller participan los profesores: Manuel Bustos V., quien lo dirige, Víctor Alvarado A., Juan Leiva V., Iván Medrano T., Ole Rask y Luis Vergara B. Taller Alfa cuenta con el auspicio de la Dirección de Extensión de nuestra universidad. Informaciones: 63-221019, tallalfa@uach.cl. ■

PROGRAMAS DE INTERÉS: caresp95i: Regla y compás. Programa gratuito muy similar a Cabri. ftp://mathsrv.ku-eichstaett.de/pub

Funciones: Programa gratuito para el estudio gráfico de funciones: http://www.xtec.es/~jlagares/indexcastella.htm

Leonard Euler (1707-1783)

Leonard Euler (léase "Oiler") nació en Basilea, Suiza el 15 de Abril de 1707. Él es, sin duda, el matemático más importante del siglo XVIII, siglo en que el mundo científico miraba sorprendido los alcances que tenía el Cálculo, la nueva herramienta matemática que se había generado un siglo antes con Newton y Leibniz.

Su padre era pastor luterano y poseía muchos conocimientos de Matemática. Le proporcionó a su hijo tanto conocimientos bíblicos como matemáticos. En 1723, con quince años, entró a la Universidad de Basilea, estudiando con Jean Bernoulli, un gran matemático de la época. En la universidad estudió también Medicina, Astronomía, Física, Lenguas orientales, Teología y Filosofía. En 1727 fue convidado por la emperatriz Catalina I de Rusia para ser miembro de la Academia de Ciencias de San Petersburgo, donde debería actuar en el área de Medicina. Era tan dedicado a su trabajo que pronto ocupó la cátedra de Filosofía y posteriormente la de Cálculo. Con eso el mundo de la Matemática entró en la época del gran Euler. En la Academia de San Petersburgo había una revista en que se publicaban sólo ideas originales. Los editores jamás tuvieron preocupaciones pues Euler producía tantos artículos que tuvieron que pedirle que parase de enviarlos o no tendrían tiempo de publicarlos. La fecundidad de su trabajo no ha sido superada pues escribió quinientas obras incluyendo artículos para revistas y libros inéditos. Dijo de él, cierta vez, el académico François Arago que podía producir matemática sin esfuerzo aparente, así como los peces nadan, los animales respiran o las aves se sustentan en el aire.

En 1741, Federico II de Prusia lo convidó para enseñar e investigar en Alemania, asumiendo la cátedra de matemática de la Academia de Berlín. Tiempo después se transformó en director de esta institución. En 1754 recibió una alumna muy especial: la princesa Anhalt Dessane, que estudiaba física y matemática. El rey, conociendo la reconocida competencia de Euler, lo nombró profesor particular de su sobrina. Las lecciones que dio a la joven se transformaron después en su famoso libro *Cartas a una princesa de Alemania*.

Volvió a San Petersburgo en 1766, respondiendo a una invitación de la emperatriz Catalina II. Tiempo después sufrió un duro golpe al perder a su esposa, pero intentó recuperarse casándose con su cuñada, hermana de su mujer.

Una de sus principales obras, el *Introductio in analysim infinitorum*, en donde se exponen principalmente ideas relacionadas con el Cálculo, contiene un uso magistral de las cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes, ideas que iban a pasar a la historia como "infinitesimales", o más recientemente como "diferenciales".
En los últimos años de su vida Euler perdió la vista, pero esto no le impidió seguir haciendo Matemática: dictaba las ecuaciones que desarrollaba y formulaba en su mente. Euler murió el 18 de Septiembre de 1783.

Durante la etapa de su invalidez Euler afirmó: "Para hacer matemática no se necesita ver, caminar, tener brazos, ni siquiera cuerpo. Sólo precisamos tener espíritu, voluntad, perseverancia y principalmente, convicción en la más bella estructura lógica creada por el hombre. Sólo así será posible proporcionar conocimiento a la humanidad, haciendo al hombre señor de la Tierra, de los aires y de los mares. Conseguirá tal vez hasta el absurdo de dar condiciones al hombre para que vaya a la Luna, la Luna de Dios".

FÓRMULA DE EULER

La fórmula que más se asocia con Euler (de las miles que fueron escritas por él), es la llamada "fórmula de Euler", que establece que: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$, de la cual se obtiene, poniendo $\theta = \pi$, la fórmula:

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

Hay quienes dicen que es la fórmula más bonita de la Matemática. ¿Ud. qué opina?
Esta fórmula contiene a cinco de los números más importantes: el número e (base de los logaritmos naturales), el número complejo i, el conocido número π y los números 0 y 1 (neutros aditivo y multiplicativo respectivamente).

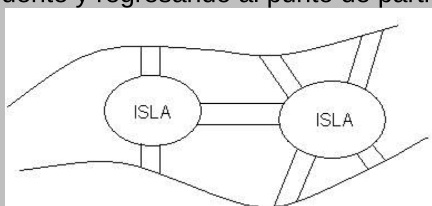
EL TEOREMA DE EULER SOBRE POLIEDROS

En 1758, Euler descubrió una relación entre el número de vértices, aristas y caras de cualquier poliedro convexo.
Recordemos que un *poliedro* es un cuerpo sólido limitado por varias superficies planas, llamadas *caras*, las intersecciones de dos caras se llaman *aristas* y los puntos donde éstas se cortan se llaman *vértices*. Un *poliedro convexo* es aquél que queda situado a un mismo lado de cualquier plano que contenga a una de sus caras.
La relación que Euler descubrió es la siguiente:

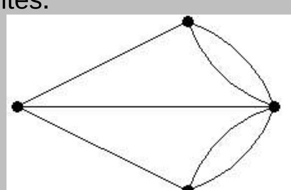
$$V - A + C = 2.$$

LOS PUENTES DE KÖNIGSBERG Y LA TEORÍA DE GRAFOS

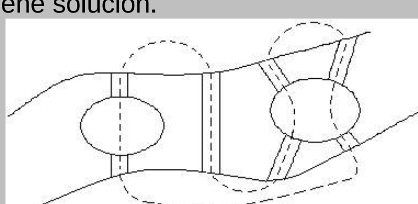
En 1736, Euler creó la **Teoría de Grafos** para resolver un problema que se le planteara. El problema es el siguiente: en el río Pregel de Königsberg había en el siglo XVIII dos islas comunicadas entre sí y con las riberas del río mediante siete puentes como se muestra en el diagrama. ¿Es posible efectuar un recorrido pasando una sola vez por cada puente y regresando al punto de partida?



Un **grafo** es un conjunto de puntos y líneas que unen pares de puntos. Un **camino** es una sucesión alternada de puntos y líneas (comienza y termina en puntos) y cada línea es incidente con el punto anterior y siguiente. Si las líneas son todas distintas se llama **cadena**, y si ella comienza y termina en un mismo punto se llama **ciclo**. Un ciclo que contiene a todas las líneas del grafo se llama **ciclo euleriano**. Un grafo es **conexo** si para cada par de puntos existe una cadena que los une. La respuesta al problema la obtuvo Euler demostrando el siguiente teorema: **"Un grafo conexo admite un ciclo euleriano si y sólo si todo punto tiene un número par de líneas que inciden en él"**. El grafo siguiente es una representación del problema, donde cada punto corresponde a una porción de tierra (isla o ribera) y las líneas a los puentes.



No se puede efectuar el recorrido deseado pues el número de líneas que inciden en sus puntos es impar. (Observar que habría bastado que en un solo punto fuese impar para que no pudiese efectuarse). Si se modifica el problema, en la forma siguiente: se elimina un puente y se agrega otro, como se indica en la figura, entonces el problema tiene solución.



La Teoría de Grafos está relacionada con numerosas ramas de la Matemática tales como: Teoría de Grupos, Matrices, Análisis Numérico, Probabilidad, Topología etc. Además tiene múltiples aplicaciones a otras disciplinas tales como: Física, Química, Electricidad, Economía, Computación y otras.

El número e

Uno de los números irracionales de mayor interés en matemáticas, junto con π, es el número e. Una aproximación a *e* con diez cifras decimales es 2,7182818285. Una serie infinita para el número *e* es: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$ El gran Euler fue quien inventó el símbolo *e*, calculó su valor hasta 23 cifras decimales.
Ya en 1614, John Napier utilizó este número como base de los logaritmos naturales o "neperianos".
Pero, ¿de dónde proviene este número? Hay varias formas de llegar a él en forma natural. Una de ellas es la siguiente: Suponga que tenemos 1 U.F. (Una unidad de fomento), la que depositamos en un banco que da el 100% de interés anual (Observe que sólo es una suposición). Así, a fin de año se tendrá 1+1= 2 U.F. Pero si nos dan la posibilidad de descomponer el interés semestralmente, o sea 50% cada 6 meses, entonces a fin de año tendríamos: $\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2,25$. Si se diesen intereses trimestralmente, correspondería 25% cada trimestre y así a fin de año habría: $\left(1+\frac{1}{4}\right)^4=2,44140625$

Imagínese, ahora que dividimos el año en *n* periodos, entonces a fin de año obtendríamos: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, y si el interés se entregase continuamente, es decir en cada instante del año, finalmente tendríamos el valor al cual tiende la expresión anterior cuando *n* tiende a infinito. Aunque puede ser sorprendente y además lamentable, la cantidad de dinero no se hace infinitamente grande, sino que tiende al número *e*. Por ejemplo para *n* = 100, se obtiene $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}=2,704813829$ y para $n = 1.000.000$, resulta $\left(1+\frac{1}{1000000}\right)^{1000000}=2.718280469$.

RESOLUCIÓN PROBLEMA ANTERIOR

- Si *a* es la medida del lado del cuadrado, entonces:

$$\frac{AG}{AD}=\frac{AE+EG}{AD}=\frac{AE+EC}{AD}=\left(\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{5}a}{2}\right)/\,a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

- Partiendo de un segmento *AB*, construyamos $BO \perp AB$. $BO = AB/2$. Con centro en *O*, dibujamos una circunferencia de radio *OB*. Trazamos una linea por *A* y *O*, la que intersecta a la circunferencia en dos puntos *P* y *Q*. Copiamos el segmento *AP* sobre *AB*, a partir de *A* obteniendo un punto *G*. Este punto *G* divide a *AB* en razón dorada.

  En efecto: Por propiedad de la tangente y la secante tenemos:

$AB^2 = AQ \cdot AP$, $AB^2 = AQ \cdot AG$, $AB/AG = AQ/AB$, $(AG+GB)/AG = AQ/AB$, $GB/AG = (AQ-AB)/AB$, $GB/AG = AP/AB$, $GB/AG = AG/AB$.

DEBATE NUMERAL

(Juan Leiva Vivar)

Los números se enfrentaron/ en un debate furioso.
El cero dijo orgulloso:/ ”Yo soy el más deseado.

Todo el mundo me apetece/ y me usan con afán,
pues al ponerme al final/ la cantidad crece y crece”.

Luego el uno dijo ufano:/ “Soy el primer natural,
todos me usan por igual/ desde Euclides a Peano”.

Las fracciones por su lado/ reaccionaron en bloque:
“Nosotras somos el tope/ del estudio en primer grado.

Aunque el problema señores/ lo tiene quien las enseña,
que en la memoria se empeña/ en lugar de aplicaciones”.

El número Pi, con rabia,/ dijo: “Sin mí no podrían
calcular en geometría/ ni perímetros ni áreas.

Y entre los irracionales/ yo soy el más conocido,
no hay nadie que no haya oído/ mis primeros decimales.

Tres catorce dieciséis/ es una aproximación,
que casi con devoción/ se aprende ya en la niñez”.

Estaba el número e/ atisbando ahí escondido.
“Aunque menos conocido/ mi importancia he de tener.

Sin mí no existirían/ logaritmos naturales
que Napier, ya siglos hace/ comprobó que sí servían”.

Al fin la recta real,/ con una fuerza que aplasta,
intervino y dijo: “¡Basta!/ ¡Todos valen por igual!

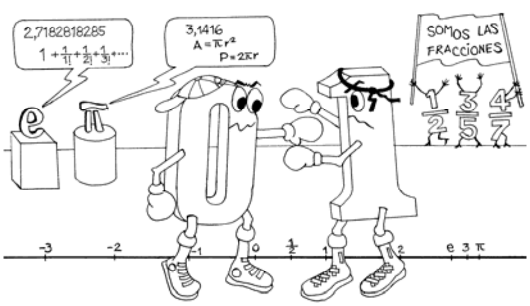
Porque si falta cualquier/ de los números, señores,
quedarían ecuaciones/ sin poderse resolver”.

Y agregó: “Deben saber/ si faltase uno al menos,
el Axioma de Supremo/ dejaría de valer”.

Así termina este caso/ enteros y naturales,
fracciones e irracionales,/ se funden en un abrazo.

En el arte, en las ciencias/ y en la vida cotidiana,
todo número se gana/ un lugar de preferencia.

Un espacio asegurado,/ todos tienen en la recta.
¡Matemática perfecta!.../ ....y así ¡queda demostrado!..



Visítenos en www.uach.cl/destac/abacom.htm

Pasatiempos matemáticos

Cálculos sin usar lápiz

Existen ciertos trucos que permiten hacer cálculos rápidos mentalmente. Por ejemplo para calcular el cuadrado de cualquier número de dos cifras terminado en 5, multiplicamos la cifra de las decenas por ella misma aumentada en 1, a este producto le adjuntamos 25.
Por ejemplo: $35^2 = 1225$, ya que 3X4=12.
La justificación de este algoritmo es sencilla.

$$(10a+5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a+1) + 25$$

Este método también se puede aplicar a números más grandes. Por ejemplo: $195^2 = 38.025$, pues 19X20=380.
También esta idea puede aplicarse a la multiplicación de un par de números de dos dígitos, cuyas decenas sean iguales y tales que la suma de sus respectivas unidades sumen 10. Por ejemplo: 37X33=1221; 46X44=2024. Un poco de álgebra lo prueba: $(10a+b)(10a+c) = 100a^2 + 10a(b+c) + bc =$

$$= 100a^2 + 100a + bc = 100a(a+1) + bc\ .$$

∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞

Los cinco cuatros (Continuación)

En la edición anterior se escribió los números desde el 21 hasta el 30, usando cinco veces el número cuatro, las cuatro operaciones básicas y la raíz cuadrada. En esta oportunidad continuamos hasta el 40. (Ahora la excepción está en el 35 y el 37).

Respuesta

$$\sqrt{4}\cdot 4\cdot 4 - \frac{4}{4} = 31\,;\ 4(\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4}) = 32\,;$$

$$4(4+4) + \frac{4}{4} = 33\,;\ 4\cdot(4+4) + \frac{4}{\sqrt{4}} = 34\,;$$

$$4\cdot 4\cdot\sqrt{4} + 4 - 4^0 = 35\,;\ 4\cdot\left(4+4+\frac{4}{4}\right) = 36\,;$$

$$4\cdot 4\cdot\sqrt{4} + 4 + 4^0 = 37\,;\ 4\cdot(4+4+\sqrt{4}) - \sqrt{4} = 38\,;$$

$$44 - 4 - \frac{4}{4} = 39\,;\ 44 - \frac{4+4}{\sqrt{4}} = 40$$

∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞

Matemáticos

Existen tres tipos de matemáticos: los que se equivocan al contar,...y los que no.

ABACOM
BOLETÍN MATEMÁTICO

Año 1, Número 4 Noviembre 2001

Publicación mensual destinada a estudiantes y profesores de Enseñanza Media.

Proyecto auspiciado por la Dirección de Extensión de la Universidad Austral de Chile.

Director: Juan Leiva V.
Director Alterno: Víctor Alvarado A.
Editor: Miguel A. Velásquez R.

I. de Matemática - C. Miraflores - Fac. de Ciencias - UACH.
Email: abacom@uach.cl Fono Fax: 221828