ABACOM

BOLETÍN MATEMÁTICO

Año 1, Número 3 Octubre 2001

Editorial

En los últimos meses se han desarrollado diversas actividades relacionadas con la ciencia en general y la matemática en particular, algunas en nuestra ciudad y otras a nivel nacional.

En primer lugar, ya tenemos los resultados de la etapa clasificatoria de la XIII Olimpíada Nacional de Matemática, que da la oportunidad a ocho estudiantes de las regiones X (sin considerar Osorno) y XI ir a competir en la final nacional a realizarse en Noviembre en el Centro de Perfeccionamiento de Lo Barnechea en Santiago.

La última semana de Septiembre comenzó a funcionar el taller Alfa, actividad destinada a estudiantes de enseñanza media con talento e interés por la matemática, por ahora sólo en Valdivia. En este taller se tratarán diversos temas interesantes que permiten a los alumnos desarrollar su creatividad.

Desde el 2 al 5 de Octubre se llevó a cabo la VII Semana de la Ciencia y la Tecnología, en que estudiantes de enseñanza básica y de media, profesores y científicos compartieron diversas actividades en torno a la ciencia, la tecnología y el arte. Esta actividad también se realizó en otras ciudades del país. El tema este año fue “La Ciencia y el Arte”.

Todas las actividades antes mencionadas son un espacio para la creatividad y ansia de aprender de los alumnos y ojalá que haya muchas más instancias para ello y logremos...”estimular dentro de nuestra educación esa aventura que es querer saber, querer entender y querer comprender el entorno”...(Dr. Eugenio Spencer. Conferencia de Clausura VII Semana de la Ciencia y la Tecnología).■

LA ECUACIÓN DE TERCER GRADO

Niccolo Tartaglia

Una ecuación de tercer grado es de la forma $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. (Si el coeficiente de x^3 no es uno, sino que otro número distinto de cero, la ecuación se multiplica por su recíproco). Durante siglos se buscó una fórmula para resolver esta ecuación, pensándose incluso que ello no era posible. Scipione Ferro (1465-1526) fue el primero que resolvió la ecuación de tercer grado y posteriormente Niccolo Tartaglia (1499-1557); pero fue Girolamo Cardano (1501-1576) quien publicó esta fórmula en su obra Ars Magna en 1545.

La resolución es mucho más complicada que la resolución de la ecuación de segundo grado e involucra en muchos casos desarrollos con números complejos. Veamos la resolución: para ello primero hagamos $x = y - a/3$, entonces, reduciendo, se obtiene: $y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0$. Así, la sustitución $x = y - a/3$ permite eliminar el término en x^2, obteniéndose una ecuación de la forma: $y^3 + py + q = 0$.

Sea $y = u + v$, entonces la última ecuación queda: $(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$, o en forma equivalente $u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q = 0$. Elegimos u, v de modo que la ecuación anterior se satisfaga, por ejemplo $u^3 + v^3 = -q,\ 3uv + p = 0$, así $u^3 + v^3 = -q,\ u^3v^3 = -p^3/27$ .Por tanto u^3, v^3 son soluciones de la ecuación de 2º grado $w^2 + qw - p^3/27 = 0$. (Pues x_1, x_2 son soluciones de la ecuación $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, o sea $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$.

Como $w = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4\left(-\frac{p^3}{27}\right)}}{2}$, entonces: $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},\ v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$

Sea $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$. Así $y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$ es una raíz de la ecuación $y^3 + py + q = 0$. Se puede verificar que esta ecuación tiene: una raíz real y dos raíces complejas conjugadas si $D > 0$; tres raíces reales (una repetida) si $D = 0$; tres raíces reales distintas si $D < 0$.

Ejemplo: Para la ecuación $y^3 - 6y - 9 = 0$ se tiene que $p = -6, q = -9$, $D = 49/4$. La fórmula da la solución: $\sqrt[3]{9/2 + \sqrt{49/4}} + \sqrt[3]{9/2 - \sqrt{49/4}} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 3$. Dividiendo $y^3 - 6y - 9$ por $y - 3$ se obtiene $y^2 + 3y + 3$, así las otras dos raíces son los complejos conjugados: $(-3 \pm \sqrt{3}i)/2$.

VALDIVIA CELEBRÓ LA VII SEMANA NACIONAL DE LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

Desde el 2 al 5 de Octubre, Valdivia celebró la VII versión de la Semana Nacional de la Ciencia y la Tecnología. Este año, Ciencia y Arte se unieron en las distintas actividades, que fueron desde Conferencias, Muestra Científica, Exposiciones en Museos de la ciudad y Concursos. Todo esto, financiado por el Programa EXPLORA, de la Comisión Nacional de Investigación Científica (CONICYT), auspiciado por la Universidad Austral de Chile (UACH) y la I. Municipalidad de Valdivia y organizado por la UACh, el Centro de Estudios Científicos(CECS) y el Instituto Forestal (INFOR). Durante cuatro días, niños, jóvenes, profesores, artistas y científicos se dieron cita para "Explorar el Arte que hay detrás de la Ciencia y la Ciencia que involucra el Arte". El colegio Inmaculada Concepción obtuvo el primer lugar en la Muestra Científica de Enseñanza Básica y el Instituto Salesiano en la sección de Enseñanza Media. En el concurso de creación de un instrumento musical, con materiales de desecho, la Escuela Francia fue la ganadora y en el de teatro, la Escuela Inés de Suárez.

Leonardo de Pisa o Fibonacci (1180? – 1250?)

Una apertura sin prejuicios a otras culturas y otras formas de ver las cosas, puede aportarnos un gran enriquecimiento y profundización en nuestro propio saber. Ésta es la conclusión que se puede obtener de la vida y obras de Leonardo de Pisa mas conocido como Fibonacci.

Su padre, Guglielmo Bonaccio (Fibonacci es una contracción de filius Bonacci) era agente de comercio en un puerto del norte de África y Leonardo, aunque nacido en Pisa, fue educado inicialmente por maestros árabes que le pusieron al corriente de los muchos conocimientos matemáticos que poseían, heredados de los griegos a través de los matemáticos indios. En los centros europeos de estudios, tales conocimientos apenas se cultivaban y apreciaban. Los viajes mercantiles por Egipto, Siria, Grecia, Sicilia, etc. y los contactos con sus centros de cultura, proporcionaron a Leonardo los elementos que le convirtieron en el matemático más destacado de la Europa Medieval.

En 1212 publicó el *Liber abaci* (Libro del ábaco) que poco tiene que ver en realidad con el ábaco y que constituye, fundamentalmente, una colección de problemas aritméticos y algebraicos, junto con una apasionada defensa de la superioridad de los métodos de numeración de los árabes (notación posicional con las nueve cifras, 1,2,3,4,5,6,7,8,9 mas el 0, el céfiro de los árabes, de donde provienen nuestras palabras cero y también cifra). Otro libro de Fibonacci de mayor importancia es *Prácticas de Geometría* del año 1220 donde entrega una compilación de la geometría al mismo tiempo que introduce algo de trigonometría. En *Liber Quadratorum* del año 1225 aproximó las raíces cúbicas obteniendo una respuesta que en la notación decimal es correcta en 9 dígitos.

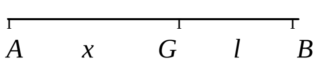
El número de oro (Φ)

Se denomina *número de la sección dorada o número de oro*, al "número que al sumarle 1 coincide con su cuadrado" y se denota con la letra griega Φ (se escribe Phi y se pronuncia "fi"); simbólicamente se tiene que $\Phi + 1 = \Phi^2$.

Esto nos conduce a la ecuación cuadrática $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$ cuyas soluciones exactas son $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Denotaremos $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (solución positiva) y por $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (inversa aditiva de la segunda solución; φ es la letra minúscula de Φ).

Al ingresar en una calculadora los valores de Φ y de φ se obtienen los números $1,6180339887...$ y $0,6180339887...$ que poseen parte decimal idéntica. Usando un poco de álgebra se puede demostrar que: $\Phi \cdot \varphi = 1$ $\quad \Phi - \varphi = 1$; $\quad \Phi + \varphi = \sqrt{5}$.

Ya Euclides en su libro 6 proposición 30 de su obra "*Los Elementos*", muestra como dividir un segmento dado en lo que llamó "razón media y extrema". Con esto quería significar que dado un trazo AB, se busca en él, un punto G de modo que la razón entre la parte más pequeña y la parte más grande, sea igual a la razón entre la parte más grande y el segmento completo. Es decir, con la notación que se muestra en la siguiente figura:



Tenemos que $\frac{GB}{AG} = \frac{AG}{AB}$ o bien $\frac{l}{x} = \frac{x}{l+x}$, lo cual nos conduce a la ecuación $x^2 = xl + l^2$ cuyas soluciones son $x = l \cdot (\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2})$.

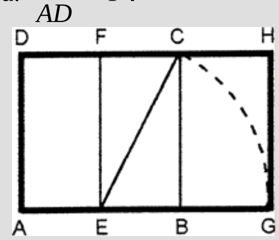
Dadas las características geométricas del problema, nos quedamos con el valor $x = l \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ de donde $\frac{x}{l} = \Phi$ ■

Medida de la belleza.

Para dividir un segmento en dos partes de modo que parezca hermoso, desde el punto de vista de la forma, se debe dividir en dos partes cuya razón sea Φ. En el arte (por ejemplo: *La última cena* de Da Vinci) y en la arquitectura (por ejemplo el *Pantheon* de París) se usa esta proporción, que caracteriza la belleza.

Construcción de un rectángulo dorado.

Construya un cuadrado ABCD. Divídalo, con un segmento vertical EF, en dos partes congruentes. Con centro en E, trace un arco de circunferencia de radio EC, obteniendo, en la prolongación de AB, un punto G. El rectángulo AGHD es un rectángulo dorado, pues la razón entre sus lados es Φ. O sea: $\frac{AG}{AD} = \Phi$.



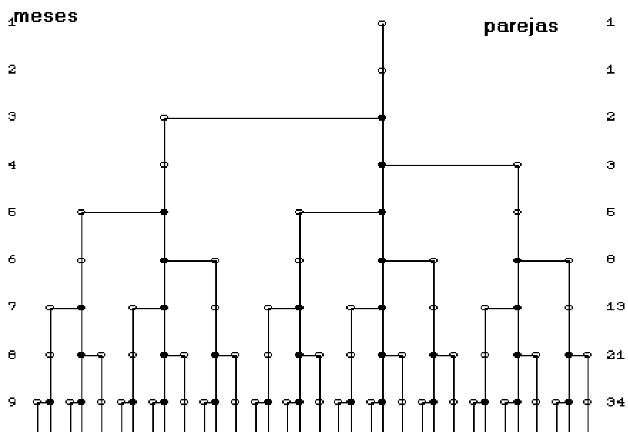
P R O B L E M A

- Verifique que la razón entre los lados del rectángulo dorado es efectivamente Φ.
- Explique como dividir un segmento en razón Φ, usando regla y compás.

La sucesión de Fibonacci

En el año 1202, Fibonacci estudió como evolucionaba una población de conejos a medida que éstos se reproducen. Las suposiciones que consideró fueron las siguientes: Un par de conejos, un macho y una hembra, se colocan en un campo. Estos maduran a la edad de un mes y al término del segundo mes, una hembra puede producir otro par de conejos. Supuso además que estos conejos nunca mueren y que la hembra siempre produce un nuevo par de conejos (un macho y una hembra) a partir de cada mes desde el segundo mes en adelante. La pregunta que se formuló Fibonacci fue ¿cuántos pares de conejos existirán al cabo de un año?.

La respuesta que encontró corresponde a la secuencia de números 1,1,2,3,5,8,13,.... y representa el número de pares de conejos que existirá cada mes.



Esta secuencia de números se conoce como los números de Fibonacci. Note que a partir del segundo número, los siguientes se obtienen sumando los dos anteriores, así: 1+1=2; 1+2=3; 2+3=5; 3+5=8;.... No es difícil obtener *la regla de recurrencia* para estos números: $f(1)=1;\ f(2)=1,\ f(n)=f(n-1)+f(n-2),\ \forall\, n\geq 3$ donde $f(n)$ representa el n-ésimo número de Fibonacci.

RESOLUCIÓN PROBLEMA ANTERIOR

Si el primer número tiene cifras a, b y c (con $a>c$), entonces se escribe: $100a+10b+c$ y al invertirlo queda: $100c+10b+a$. Para restarlos debe considerarse "reserva" del modo siguiente:

$$\left[100(a-1)+(90+10b)+(10+c)\right]-\left[100c+10b+a\right]=$$
$$=100(a-c-1)+90+(10+c-a)$$

Invirtiendo el resultado y sumando queda:

$$\left[100(a-c-1)+90+(10+c-a)\right]+\left[100(10+c-a)+90+(a-c-1)\right]=1089$$

Análogamente para el número de dos cifras, si estas son x e y ($x>y$), se escribe: $10x+y$.

Tenemos:

$$\left[10(x-1)+(10+y)\right]-\left[10y+x\right]=\left[10(x-y-1)+(10-y+x)\right],$$

y luego:

$$\left[10(x-y-1)+(10-x+y)\right]+\left[10(10-x+y)+(x-y-1)\right]=99.$$

Relación entre el número de oro y los números de Fibonacci.

Observe la siguiente tabla:

1	1	2	3	5	8	13
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}=1{,}5$	$\frac{5}{3}=1{,}66$	$\frac{8}{5}=1{,}6$	$\frac{13}{8}=1{,}625$

Lo que se ha hecho en cada caso es dividir un número de Fibonacci por su predecesor y he aquí la respuesta: los valores que se obtienen son aproximaciones de Φ y, mientras más sean los números a considerar, tenemos una mejor aproximación.

Pero aún hay más; recuerde que Φ se definió como una de las soluciones de la ecuación $\Phi^2=\Phi+1$. Al dividir esta ecuación por Φ nos queda que $\Phi=1+\frac{1}{\Phi}$ lo cual nos indica que Φ es igual a uno más su recíproco. Esta consideración nos conduce a que podamos escribir $\Phi=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\Phi}}$ (se obtiene al reemplazar en el segundo miembro de la ecuación anterior Φ por $1+\frac{1}{\Phi}$). Si repetimos este proceso una y otra vez llegamos a que $\Phi=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+....}}$. Una expresión de este tipo se conoce con el nombre de fracción continua (esto no significa que Φ sea un número racional).

Cuando detenemos la fracción continua para Φ en varios puntos, obtenemos valores que aproximan a Φ:

$\Phi_1=1$; $\Phi_2=1+\frac{1}{1}=2$; $\Phi_3=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}=\frac{3}{2}$;

$\Phi_4=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}=\frac{5}{3}$; ....y así obtenemos la secuencia de fracciones $\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\frac{13}{8},\frac{21}{13},...$ que son las razones dadas en la tabla. La regla de recurrencia para generar estas razones es $\frac{f(n)}{f(n-1)}$; $\forall\, n\geq 2$.

Comprobaremos que el límite de esta sucesión es Φ. Para ello, sea $L=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{f(n-1)}$, entonces

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{f(n-1)+f(n-2)}{f(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\cfrac{1}{\cfrac{f(n-1)}{f(n-2)}}\right)=1+\frac{1}{L}$$ o bien

$L^2=1+L$ obteniendo que el límite *L* debe ser nuestro número Φ.■

PARADOJAS

Una paradoja es algo que a primera vista parece falso, pero en realidad es verdadero, o parece verdadero, pero en rigor es falso, o sencillamente, encierra contradicciones en sí mismo. Quizás la mayor paradoja es que hay paradojas en matemáticas. Veamos algunas paradojas.

Paradoja algebraica

Se puede "probar" que $1 = 2$, haciendo un desarrollo algebraico, que parece correcto, pero en realidad contiene un error. (¿puedes descubrirlo?).

Partamos de que $y = x$, multipliquemos por x, obteniendo: $xy = x^2$, restemos y^2 : $xy - y^2 = x^2 - y^2$, factorizando queda: $y(x - y) = (x + y)(x - y)$ y dividiendo por $x - y$ resulta que $y = x + y$, pero como se tiene que $y = x$ obtenemos finalmente que: $x = 2x$. Si asignamos a x el valor 1 resulta: ¡$1 = 2$!.

Algo de números

Consideremos el caso en que cada número entero lo expresamos en palabras, sin el uso de símbolos. Así por ejemplo 1.400 se expresa *mil cuatrocientos* y 1.779.823 se escribe *un millón setecientos setenta y nueve mil ochocientos veintitrés.* Como se ve algunos números requieren de más sílabas para expresarlos que otros; de los ejemplos dados el primero requiere 5 sílabas y el segundo 21. Entre aquéllos números que requieren exactamente 21 sílabas para ser nombrados debe haber uno más pequeño. Se puede comprobar que 444.441 es este número más pequeño. Pero la expresión *el menor entero que se expresa con veintiún sílabas* es una forma inequívoca de expresar este número. Así tenemos que ¡el menor entero que se expresa con veintiuna sílabas se puede expresar con menos sílabas!.

Paradoja de Zenón

Una famosa paradoja, planteada por Zenón de Elea, afirma que es imposible recorrer una distancia dada, pues primero se debe recorrer la mitad de la distancia, en seguida la mitad de lo que queda, y así sucesivamente. O sea que la distancia a recorrer es : $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$ Pero aunque esta expresión tiene un número infinito de términos, su suma es finita y vale 1.

En efecto si anotamos $d = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$ y multiplicamos por 2 obtenemos $2d = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ restando estas dos igualdades resulta que $d = 1$.

Equivalente a la anterior es la Paradoja de Aquiles y la Tortuga. Aquiles corre para alcanzar a la tortuga. Primero debe llegar al lugar de donde parte la tortuga, lugar del cual la tortuga ya ha salido. Esta situación se repite. A medida que Aquiles llega a un nuevo punto de su carrera, la tortuga ya lo ha abandonado. Así, ¡Aquiles no alcanza jamás a la tortuga! ■

Visítenos en www.uach.cl/destac/abacom.htm

Pasatiempos matemáticos

La cabellera humana

Si una ciudad tiene 130.000 habitantes, se puede demostrar que existen, al menos, dos personas con la misma cantidad de cabellos.

En efecto: alguien con mucha paciencia y que realmente tenía muy poco que hacer, contó y calculó que cada centímetro de cuero cabelludo humano contiene, a lo máximo, 165 cabellos. Además comprobó que la superficie referida de la cabeza humana es de aproximadamente 775 cm^2 . Así el número máximo de cabellos que puede tener una persona es de 775×165=127.875. Podrá existir, entonces, una persona con 1 cabello, otra con 2 cabellos, otra con 3 cabellos, ...y así sucesivamente, hasta una última con el máximo de 127.875 cabellos. Como el número 130.000 es mayor que 127.875, podemos afirmar, que debe repetirse el número de cabellos en al menos dos personas.

∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞

Los cinco cuatros

En las ediciones anteriores se han escrito los números desde el 0 hasta el 20, usando cuatro veces el número cuatro y las cuatro operaciones básicas para el 0 hasta el 10 y agregando la raíz cuadrada para el 11 al 20. Ahora proponemos expresar los números desde el 21 al 30, usando cinco veces el número cuatro, las operaciones básicas y la raíz cuadrada. (Nuevamente se hace una excepción, esta vez con el 29).

Respuesta

$$4 \cdot 4 + 4 + \frac{4}{4} = 21\,;\; 4 \cdot 4 + 4 + \frac{4}{\sqrt{4}} = 22\,;\; \frac{44}{\sqrt{4}} + \frac{4}{4} = 23\,;$$

$$4 \cdot \left(\frac{4+4}{4} + 4\right) = 24\,;\; 4 \cdot (4 + \sqrt{4}) + \frac{4}{4} = 25\,;$$

$$\frac{44}{\sqrt{4}} + \sqrt{4} + \sqrt{4} = 26\,;\; 4 \cdot 4 + \frac{44}{4} = 27\,;\; 4 \cdot \left(4\sqrt{4} - \frac{4}{4}\right) = 28\,;$$

$$44 - 4 \cdot 4 + 4^{0} = 29\,;\; (4 + \sqrt{4}) \cdot \left(4 + \frac{4}{4}\right) = 30$$

∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞

Números interesantes

Teorema: Todos los números naturales son interesantes.

Demostración: Razonaremos por contradicción. Supongamos que existen números naturales que no son interesantes. Entonces debe haber uno de ellos que es el menor. (Pues todo subconjunto de los naturales tiene un menor elemento). Este número menor, ¿no es interesante? ■

ABACOM

BOLETÍN MATEMÁTICO

Año 1, Número 3 Octubre 2001

Publicación mensual destinada a estudiantes y profesores de Enseñanza Media.

Proyecto auspiciado por la Dirección de Extensión de la Universidad Austral de Chile.

Director: Juan Leiva V.

Director Alterno: Víctor Alvarado A.

Editor: Miguel A. Velásquez R.

I. de Matemática - C. Miraflores - Fac. de Ciencias - UACH.

Email: abacom@uach.cl Fono Fax: 221828